Почему пространство-время псевдоевклидово

(Статья из цикла понимание физики)

А.В.Каминский

Раздвоение и уменьшение симметрии – вот, где собака зарыта В.Паули

Введение

Чтобы получить преобразования Лоренца, физики прибегают к аксиоматическому построению специальной теории относительности (это проще!). В статье мы последуем Ф.Клейну, показавшему в своей Эрлангенской программе, что любая геометрия, будучи теорией инвариантов некоторой группы преобразований, может быть получена из наиболее общей группы всех линейных преобразований путем выделения из нее соответствующих подгрупп. В частности, Клейн указал и на то, что геометрия Минковского, использующаяся в специальной теории относительности (СТО), не является исключением. С точки зрения физики, идея Клейна классификации геметрий является мощнейшим инструментом, однако, только физика может ответить на вопрос о выборе той или иной геометрии из множества возможных. Почему в природе реализуется псевдоевклидова геометрия? Математика на этот вопрос не отвечает. Мы покажем, что псевдоевклидовость метрики является следствием так называемой физической неполноты [1], которая определяет выбор абсолюта Кэли – инвариантной относительно некоторой подгруппы преобразований поверхности.

1. Раздвоение

Физическая неполнота возникает при рассмотрении Вселенной, как замкнутой конечной системы, состоящей из наблюдателя (субъекта) и исследуемой системы (объекта). Отметим сразу, что здесь мы строим абстрактную математическую модель наблюдателя. Поэтому, все антропоморфные аллюзии должны быть исключены. Физическая неполнота отражает принципиальную неспособность субъекта различать некоторые состояния мира. В нашем построении мы опираемся на 3 основные аксиомы:

1. Мир конечен и имеет конечное число состояний.
2. Наблюдатель (Subject) – часть этого конечного мира.

3. Мировое множество состояний образует циклическую группу. Это тривиальное следствие его конечности (1-я аксиома) и однозначности отображения в себя.

Под состояниями наблюдателя Subj (субъекта) мы будем понимать множество измеряемых (осознаваемых) физических состояний. Мировое множество состояний W образуется, как произведение циклических групп состояний наблюдателя «Subj» и остальной части мира (объекта) «Obj». То есть, мировое множество может быть представлено факторизуемой[1] конечной циклической группой:

$$\mathrm{W} = \mathrm{Subj} \otimes \mathrm{Obj} \qquad (2)$$

Квантовые состояния конструируются из пар $\mathrm{Subj(i)} \otimes \mathrm{Obj(j)}$ и бразуют смежные классы по подгруппе состояний субъекта. Эти смежные классы образуют фактор группу $\mathrm{W/Subj}$, которая может быть основой построения пространства состояний квантовой механики (КМ)[2]. Напомним, что квантовые состояния являются классами эквивалентности группы U1 физически неразличимых фазовых состояний. В этом контексте, формализм КМ обретает смысл. Покажем, что СТО имеет ту же природу. Прежде всего, отметим напрашивающуюся аналогию со структурой проективного пространства так же являющегося фактор пространством или пространством классов эквивалентности. Поэтому, естественно предположить, что физическое пространство – проективно.

2. Уменьшение симметрий

Согласно теореме Мебиуса, n-мерная проективная геометрия задается линейными преобразованиями в n+1 мерном Евклидовом пространстве.

$$x^i = a^i_j x'^j \qquad (1)$$

$\mathrm{a^i_j}$ – постоянные. Группа всех линейных преобразований (1) является чрезвычайно широкой и порождает, так называемую проективную неметрическую геометрию в которой нет параллельных прямых и все кривые второго порядка – неразличимы. Рассмотрим пятимерное Евклидово пространство однородных координат $\mathrm{x^i (i = 1,2,3,4,5)}$ и аффинную часть проективного пространства $\mathrm{X^\mu (i = 1,2,3,4)}$, где $\mathrm{X^\mu = \frac{x^i}{x^5}}$ и $\mathrm{x^5} \neq 0$, которую отождествим с физически наблюдаемыми – пространством и временем. При этом, пространство однородных координат, которое, обычно, вводят формально, у нас обретает смысл ***объективного пространства***, где добавочная 5-я координата $\mathrm{x^5}$ соответствует принципиально не наблюдаемым степеням свободы

[1] Чтобы W была циклической, порядки Subj и Obj должны быть взаимно просты.
[2] В данном случае, это пространство компактно, так как состоит из конечного числа точек.

объекта. На рис.1 для наглядности, показано Евклидово $\mathbb{R}^3$пространство однородных координат. Вектор, указывающий на точку, лежащую в проективной плоскости $\mathrm{Z} = 1$, является классом эквивалентности, образуемым тройками пропорциональных координат $\{\gamma\mathrm{x}, \gamma\mathrm{y}, \gamma\mathrm{z}\}$. Идея проективной геометрии, как раз и состоит в установлении соответствия между лучами (классами эквивалентности) в n+1 мерном пространстве и точками в n-мерном.

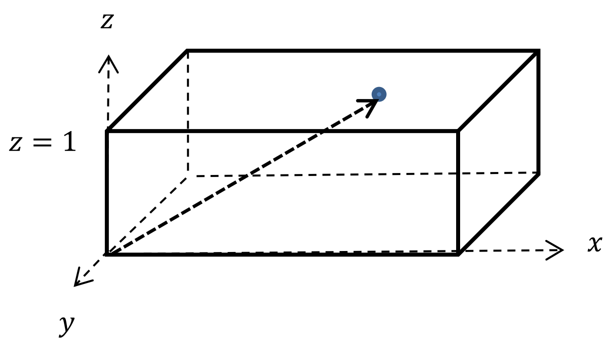

Рис.1

Итак, мы предположим, что координаты $x^\alpha = (X, Y, Z, T)$ α =1,2,3,4 физического пространства-времени, на самом деле являются классами эквивалентности объективного пространства. Чтобы понять, почему физическое пространство псевдоевклидово и почему необходимы преобразования Лоренца, мы должны рассмотреть, «физику» в объективном пространстве однородных координат $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}, s\}$. Пятую скрытую координату, относящуюся к группе Obj, здесь будем обозначать буквой s; $x^5 = s$. Объективное $\mathbb{R}^5$ пространство однородных координат является полным. Полнота предполагает то, что пространство событий в этом 5-ти мерном мире исчерпывающе описывается пятью действительными числами. Образно говоря, полнота пространства означает некую самодостаточность, математически выражающуюся в том, что любая фундаментальная последовательность сходится к точке того же пространства. Учитывая, что комплексные числа представляют собой способ упаковки пар действительных чисел, объективное пространство не может быть даже частично комплексно, так как это означало бы наличие в его описании избыточных степеней свободы, которых у нас нет по определению.

Как известно, в аффинных и проективных пространствах можно ввести метрику с помощью квадратичных форм от координат точек. Рассмотрим уравнение с левой частью в виде квадратичной формы:

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + s^2 + \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 = 0 \qquad (3)$$

Где $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}, s$ – действительные. Очевидно, что оно не соответствует ни какому действительному $\mathbb{R}^4$ многообразию в $\mathbb{R}^5$ и потому должно быть исключено из рассмотрения. Далее, учитывая, что координаты $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ одной природы, то они должны иметь одинаковый знак. Поэтому, выбор остается между формами:

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + s^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 = 0 \qquad (4)$$

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 - s^2 + \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 = 0 \qquad (5)$$

Легко показать, что условие инвариантности формы (4) выделяет из проективной группы **(**1**)** подгруппу Лоренца. Вопрос выбора между уравнениями (4) и (5) это только вопрос интерпретации[3]. Уравнение (4) кажется более естественным, так как будучи записано в виде:

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + s^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 \qquad (6)$$

Позволяет интерпретировать время, как меру длины в пространстве $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, s\}$. Покажем, что проективные преобразования (линейные преобразования однородных координат) $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}, s\}$, сохраняющие (4) при переходе к неоднородным (аффинным) координатам $\mathrm{X} = \mathrm{x}/s$, $\mathrm{Y} = \mathrm{y}/s$, $\mathrm{Z} = \mathrm{z}/s$, $\mathrm{T} = \mathrm{ct}/s$; $s \neq 0$ образуют группу преобразований Лоренца [2]:

Не снижая общности, для простоты, будем рассматривать трехмерное пространство $\{\mathrm{x}, \mathrm{t}, \mathrm{s}\}$, где x, t – пространство- время, а s – дополнительная (скрытая) координата. Рассмотрим линейные преобразования :

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}ct + a_{13}s \\ ct' &= a_{21}x + a_{22}ct + a_{23}s \qquad (7) \\ s' &= a_{31}x + a_{32}ct + a_{33}s \end{aligned}$$

Исключим из рассмотрения зависимость s от протяженных координат $a_{31} = a_{32} = 0$ С точки зрения теории Калуцы – Клейна [3], это означает, что мы рассматриваем случай без электромагнитных полей. Ведь в теории электрогравитации Калуцы электромагнитные поля описываются частью $g_{\mu 5}$ метрического тензора. В результате мы сразу же сузим группу проективных преобразований (7) до подгруппы аффинных преобразований (8):

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}ct + a_{13}s \\ ct' &= a_{21}x + a_{22}ct + a_{23}s \qquad (8) \end{aligned}$$

[3] Взяв за основу (5) мы получим ту же самую физику, но в ней действие уже не будет инвариантом. Вместо него, инвариантом будет время.

$$s' = a_{33}s$$

Будем так же считать, что $s = s'$, то есть $a_{33} = 1$; Кроме этого, следуя условию цилиндричности [4] исключим явную зависимость наблюдаемых от скрытой степени свободы. То есть, положим: $a_{13} = \frac{\partial x'}{\partial s} = 0$; и $a_{23} = \frac{\partial t'}{\partial s} = 0$; (это условие, как будет ясно из дальнейшего, выделяет подгруппу Лоренца из 10 параметрической группы Пуанкаре). В результате имеем:

$$x' = a_{11}x + a_{12}ct$$

$$ct' = a_{21}x + a_{22}ct \qquad (9)$$

$$s' = s$$

Теперь самое важное - потребуем сохранение коники, вырезаемой конусом второго порядка (4) на проективной плоскости $s = 0$ при проективных преобразованиях (9). Она и будет у нас Абсолютом

$$x^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (10)$$

В результате (см. приложение) мы получим значения коэффициентов a_{ij}. Далее, разделив в (9) первые 2 уравнения на третье, перейдем от однородных координат к аффинным:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \mathrm{a}_{11}\mathrm{X} + \mathrm{a}_{12}\mathrm{cT} \\ \mathrm{cT}' &= \mathrm{a}_{21}\mathrm{X} + \mathrm{a}_{22}\mathrm{cT} \end{aligned} \qquad (11)$$

Где $\mathrm{X} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{s}}$; $\mathrm{cT} = \frac{\mathrm{ct}}{\mathrm{s}}$;

Подставляя найденные коэффициенты a_{ij}, получим:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \mathrm{X} \cdot \mathrm{ch}\alpha - \mathrm{cT} \cdot \mathrm{sh}\alpha \\ \mathrm{cT}' &= -\mathrm{X} \cdot \mathrm{sh}\alpha + \mathrm{cT} \cdot \mathrm{ch}\alpha \end{aligned} \qquad (12)$$

Положив $\mathrm{X} = 0$ и разделив 1-е уравнение на второе, получим скорость относительного движения систем отсчета:

$$\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{cT}'} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}} = -\mathrm{th}\alpha; \quad (13)$$

И учитывая, что: $ch\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\alpha}}$ и $\mathrm{sh}\alpha = \frac{\mathrm{th}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\alpha}}$; получим преобразования Лоренца в известной форме:

$$\mathrm{X}' = \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{1-\mathrm{V}^2/\mathrm{c}^2}} + \frac{\mathrm{VT}}{\sqrt{1-\mathrm{V}^2/\mathrm{c}^2}}$$
$$\mathrm{T}' = \frac{\mathrm{XV}}{\mathrm{c}^2\sqrt{1-\mathrm{V}^2/\mathrm{c}^2}} + \frac{\mathrm{T}}{\sqrt{1-\mathrm{V}^2/\mathrm{c}^2}} \quad (14)$$

На рисунке 2 показано сечение конуса $\mathrm{x}^2 + \mathrm{s}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 = 0$ плоскостью $\mathrm{s} = 0$. Это световой конус, то есть $\mathrm{x}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 = 0$ или $\mathrm{x} = \pm\mathrm{ct}$; Обратим внимание, что прямые $\mathrm{x} = \pm\mathrm{ct}$, являясь образующими абсолюта, не принадлежат аффинной части проективного пространства.

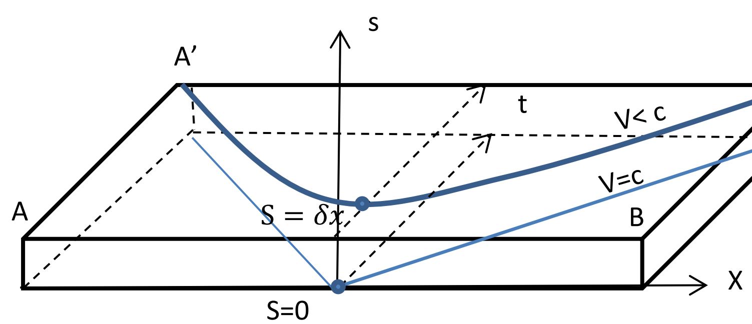

Рис. 2 Компактифицированное пространство однородных координат. Проективные плоскости s=0 и s=1 отождествлены.

Сечение конуса плоскостью $\mathrm{S} = \delta\mathrm{x}$ дает гиперболу $\mathrm{x}^2 + \mathrm{s}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 = 0$, асимптотами которой является световой конус. Эта гипербола, всецело принадлежит аффинной части проективного пространства. Касательные к ней являются скоростями массивных частиц. Величина:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 \quad (15)$$

является физическим проективным инвариантом, играющим роль расстояния в пространстве с псевдоевклидовой метрикой. Легко показать, что метрика определена только внутри светового конуса $\mathrm{V} < \mathrm{c}$. То есть сама структура, получившейся геометрии диктует ограничение на скорость движения в нем. Следует помнить, что это ограничение распространяется только на скорость проекции частицы. Сама же частица, локализованная в объективном пространстве может двигаться и со скоростью $\mathrm{V} > \mathrm{c}$. Возможны 2 принципиально различные моды движения частиц в объективном пространстве однородных координат – движение в плоскости и движение в слое.

В приведенном выводе нет ничего нового, ибо хорошо известно, что преобразования Лоренца можно получить из требования инвариантности интервала. Но величина $x^2 - c^2t^2$, как раз и является интервалом, а абсолют является световым конусом!. Цель нашего анализа состоит исключительно в придании физического смысла этим, впервые проделанным Ф. Клейном уже более 100 лет назад геометрическим построениям. Итак, мы показали, что сама структура проективного пространства и его топология навязываются принятой субъект объектной моделью. Линейные преобразования в объективном $\mathbb{R}^5$ пространстве, будучи редуцированы к физическому $\mathbb{R}^4$ пространству-времени путем проецирования, трансформируются в преобразования Лоренца. Для физического наблюдателя, локализованного в проективной плоскости доступна только проекция мировой динамики в$\mathbb{R}^5$. Проекция же всегда выглядит искаженной и неполной. Таким образом, мы можем заключить, что преобразования Лоренца являются результатом «субъективного» видения реальности физическим наблюдателем, и это единственно, доступная ему реальность.

Релятивистская динамика

Прежде, чем перейти к изучению динамики релятивистских частиц, заметим, что наше описание проективного пространства было несколько упрощенным и поэтому ущербным. Дело в том, что топология нашего пространства однородных координат, индуцируемая субъективной неполнотой (смотрите формулу 2) должна быть компактной. Компактифицируем сначала $\mathbb{R}^5$ по подпространству $\{x, y, z, s\}$ и рассмотрим цилиндр с осью $-\infty < t < +\infty$. Это можно себе представить, как параллелепипед, вытянутый вдоль оси времени с попарно отождествленными стенками (рис.2). Переход к неоднородным координатам $\{\mathrm{X}, \mathrm{T}\}$, означает склеивание ребра AB верхней грани с зеркально отраженным ребром $A'B'$. Но верхняя грань представляет собой двухмерный тор $T^2 = S_x \otimes S_t$. Поэтому, в проекции, мы получим двухмерную бутылку Клейна (при полном рассмотрении – 4-х мерную). Бутылка Клейна является плоским пространством с нулевой Эйлеровой характеристикой. Поэтому, на ней возможна псевдоевклидова метрика. Для нас однако, здесь существенно следующее:

Обратим внимание на то, что при обычном построении проективного пространства луч (класс эквивалентности) в пространстве однородных координат $\{\gamma x, \gamma y, \gamma z, \gamma t, \gamma s\}$ проецируется на точку, которую можно связать с координатами классической частицы в аффинном физическом пространстве $\{X, Y, Z, T\}$ (смотрите Рис.1). В компактифицированном же пространстве луч $\{\gamma x, \gamma y, \gamma z, \gamma t, \gamma s\}$ в общем случае, многократно пересекает проективную плоскость $S = \delta x$, образуя целое множество точек (пунктир на проективной гиперплоскости). Смотрите рис.3. Но это, конечно же, не множество частиц, а одна, теперь уже, делокализованная (квантовая) частица с импульсом $p \sim 1/\lambda$, где λ- расстояние между точками в проекции на ось x. О делокализации можно говорить, так как фазовая скорость частицы (скорость перемещения от точки к точке), больше скорости света. Ниже мы покажем, что это действительно так. Таким образом, классическая частица на проективной гиперповерхности приобретает все особенности квантового поведения.

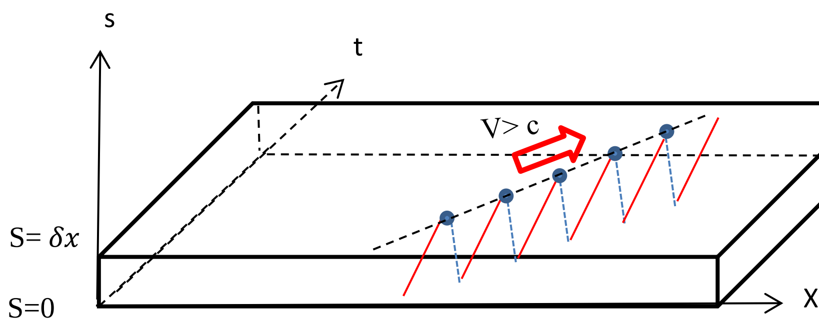

Рис.3 Пунктирная траектории массивной частицы, может рассматриваться, как поле в данный момент времени, так как ее точки для физического наблюдателя причинно не связаны.

Делокализация сразу же приводит к понятию квантованного поля пространственных осцилляторов. Частица, двигаясь в скрытом времени, "заметает" пространство вне светового конуса (пространственно-подобные траектории). Поэтому, движение частицы не может быть наблюдено и воспринимается наблюдателем, как поле, присутствующее в некоторой области пространства. Достаточно же произвести измерение, как поле мгновенно исчезнет из всех точек пространства не локально, ибо частица объективно не может находиться более, чем в одной точке одновременно. Этим может быть обоснована квантово-механическая R-процедура (коллапс квантового состояния). Таким образом, наш подход вносит ясность в застарелую проблему корпускулярно-волнового дуализма, которая создает дискомфорт для начинающих изучать КМ. Можно заключить, что квантовая механика, так же, как и СТО является результатом проективного видения реальности физическим наблюдателем.

Для нас важно следующее:
1. Сечение, как, так тора, так и поверхности Клейна, всегда изоморфно окружности, и следовательно, мы имеем дело с группой U(1) комплексных чисел по модулю 1. Этого достаточно, чтобы описывать поля траекторий с помощью функций вида:

$$\psi = Aexp(ikx) \quad (16)$$

Где A – действительное число, описывающее плотность точек в проективном пространстве.

2. Проективное пространство компактно и конечно[4]. Следовательно, все траектории на нем замкнуты. Эти два условия приводят к тому, что рассматриваемое многообразие становится неким топологическим резонатором.

Воспользовавшись цикличностью скрытой координаты $s = s \ mod \ \delta x$, разложим поле в $\mathbb{R}^5$ в ряд Фурье по модам n степени свободы s :

$$\psi(x^\mu, s) = \sum_n \psi_n(x^\mu) \cdot \exp(-ins\frac{2\pi}{\delta x}) \qquad (17)$$

$$\text{Где } \psi_n(x^\mu) = \exp(ip_{n\mu}x^\mu); \qquad (18)$$

Здесь δx - периметр тора по s, $p_{n\mu}$ - 4-х импульс n-ой гармоники. Сначала рассмотрим одну n-ю гармонику поля (17)

$$\psi_n(x^\mu, s) = \exp(ip_{n\mu}x^\mu) \cdot \exp(-ins\frac{2\pi}{\delta x}) \quad (19)$$

Подставляя это решение в пятимерное "волновое" уравнение:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)\psi(x^\mu, s) = 0 \qquad (20)$$

Получим характеристическое уравнение дисперсии для массивных частиц:

$$p^\mu p_\mu - \frac{n^2}{\delta x^2} = 0 \quad (21)$$

В трехмерном виде оно представляет собой хорошо известное релятивистское соотношение между энергией и импульсом:

[4] Конечность означает не Хаусдорфовость. Если быть точным, то рассматриваемые нами пространства должны строиться над полями Галуа.

Так как $p^{\mu}p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2$; в результате получим: $p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(\frac{n}{\delta x}\right)^2 c^2}$

Таким образом, роль массы выполняет величина $m = \frac{n}{\delta x}$
Итак, масса[5] определяется номером моды n при движении безмассовой частицы (фотона) в скрытом измерении и масштабом компактификации.
Если $m_n = 0$, то четырёхимпульс имеет нулевой модуль, что соответствует безмассовым фотонам.

Выводы:

Мы показали, что нет необходимости вводить релятивистскую инвариантность «руками», как это делается во всех современных теориях. Релятивистская инвариантность возникает сама, как следствие субъект-объектного отношения в конечном мире. Как мы видели, роль наблюдателя, не сводится к фиксации объективных фактов о природе, но формирует их в конфигурационном отношении с объектом. Другими словами, КМ и СТО есть результат проецирования процессов, протекающих в расширенном пространстве на пространство состояний наблюдателя. Мы показали, что физическая неполнота, приводит к структуре фактор-пространства, являющейся общей базой для обоснования КМ и СТО.

Приложение 1: Нахождение коэффициентов [5,6].

Мы имеем линейные преобразования, генерирующие аффинную геометрию:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad \text{(a.1)}$$
$$x_3' = x_3$$

Мы хотим выделить из группы этих преобразований подгруппу Лоренца. Для этого в качестве абсолюта мы взяли систему уравнений:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad \text{(a.2)}$$
$$x_3 = 0;$$

[5] В естественных единицах c=1 и ħ = 1 массу измеряют обратными метрами (волновыми числами), либо обратными секундами (частотой).

Потребуем чтобы ${x_1}^2 - {x_2}^2$ было инвариантно относительно (a.1).

$$(a_{11}x + a_{12}ct)^2 - (a_{21}x + a_{22}ct)^2 = x^2 - c^2t^2$$

Возводя в квадрат и выделяя множители перед x^2и t^2, получим:

$$(a_{11}^2 - a_{21}^2){x_1}^2 + (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})x_1x_2 + (a_{12}^2 - a_{22}^2){x_2}^2 = {x_1}^2 - {x_2}^2$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1 \\ &a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1 \qquad\qquad (a.3) \\ &a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0 \end{aligned}$$

Заменим в первом равенстве: $a_{11} = \text{ch}\alpha$; $a_{21} = -\text{sh}\alpha$; (a.4)

Далее из 3-го равенства: $\frac{a_{12}}{a_{21}} = \frac{a_{22}}{a_{11}} = k$

$$a_{12} = -\frac{a_{22}}{a_{11}}\text{sh}\alpha = -k \cdot \text{sh}\alpha;\ \ a_{22} = \frac{a_{12}}{a_{21}}\text{ch}\alpha = k \cdot \text{ch}\alpha$$

Подставим a_{12} и a_{22} во второе равенство:

$$k^2\text{sh}^2\alpha - k^2\text{ch}^2\alpha = -1 \qquad \Rightarrow \qquad k = \pm 1$$

Пусть k=1, тогда: $a_{12} = -\text{sh}\alpha$; $a_{22} = \text{ch}\alpha$; (a.5)

Итак, имеем матрицу коэффициентов:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \text{ch}\alpha & -\text{sh}\alpha \\ -\text{sh}\alpha & \text{ch}\alpha \end{bmatrix}$$

Литература

В статье использованы следующие источники:

1. *Каминский А.В.* Физическая неполнота - ключ к объединению физики; Гипотезы, размышления, исследования LAP LAMBERT Academic Publissing (2012-08-31)
2. *Klein O.* Quantentseorie und funfdimensionale Relativitatstseorie // Zeits. f. Psysic, 1926.
3. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1-2. М.-Л., 1933
4. *Pauli to Seisenberg*, 21 Dec. 1957 [2811], PLC V/4i, also quoted in Seisenberg, Psysics and Beyond, 298
5. *Цих А.К.,* Многообразие геометрий, 1999, МАТЕМАТИКА
6. *Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф.* От проективной геометрии - к неевклидовой. М.: Просвещение, 1979. 158 с